

Ejercicios de Análisis Matemático

Números complejos

1. Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en forma cartesiana.

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & (2-5i)(3+2i) & \text{ii)} \quad (2i-1)^3 \quad \text{iii)} \quad \overline{(2+i)(-1-i)}(1+i) \\ \text{iv)} & \frac{(-1+i)(1+3i)}{-2+i} & \text{v)} \quad (1-2i)^{-2} \quad \text{vi)} \quad \frac{2+i}{2-i} \end{array}$$

2. Calcula: a) $|(-1+i)^9(2-i)|$ b) $\left| \frac{5-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-i(\sqrt{5}+1)} \right|$.

3. Calcula los números complejos $z = x + iy$ tales que $\frac{2z-1}{z-2}$ es:

a) Un número real; b) Un número imaginario puro; c) Un número de módulo 1.

4. Expresa los siguientes números en forma cartesiana:

$$\text{a)} \quad (-1+i\sqrt{3})^{11} \quad \text{b)} \quad \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^5 \quad \text{c)} \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^6 \quad \text{d)} \quad (-\sqrt{3}+i)^{13}$$

5. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a)} \quad z^4 = i \quad \text{b)} \quad z^3 = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{c)} \quad z^8 = 1 \quad \text{d)} \quad z^2 + 2iz - \sqrt{3}i = 0$$

6. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que $\cos 4\varphi = 8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1$.

7. Describe gráficamente los conjuntos de números complejos z que verifican:

$$\text{a)} \quad |z-3| \leq 3, \quad \text{b)} \quad 2 < |z-i| \leq 3, \quad \text{c)} \quad |\arg z| < \pi/6, \quad \text{d)} \quad |z-i| + |z+i| = 4, \quad \text{e)} \quad |z-1| = |z-2i|$$

8. Calcula $\log z$ y $\text{Log } z$ cuando z es uno de los números siguientes: i , $-i$, e^{-3} , e^{5i} , 4 , $-5e$, $1+i$.

9. Calcula $\log(3i) + \log(-1+i\sqrt{3})$ y $\log(3i(-1+i\sqrt{3}))$. Comenta el resultado.

10. Calcula: $[(-4)^i]$, i^{-3i} , $[i^{2/\pi}]$, $[i^i]$, 1^{2i} , 3^{1-i} , $((-i)^i)^i$, $(1+i)^{1+i}$.

11. Explica con detalle dónde está el error en las igualdades siguientes:

$$i = (-1)^{1/2} = [(-1)^3]^{1/2} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i$$

Lecturas obligatorias. Del Capítulo 3 de mi libro “Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable”, que puedes descargar de mi página Web www.ugr.es/local/fjperez, las secciones 3.3.3 y 3.4 tituladas “Raíces de un número complejo” y “Funciones complejas elementales”. Así mismo, los ejercicios resueltos números 28, 30 y 32.

Lecturas optativas. Las notas históricas al final del Capítulo 3 sobre algunas aplicaciones de los números complejos al movimiento armónico simple y a los circuitos eléctricos son interesantes y pueden ser útiles para otras asignaturas.